

Олександр Шень

ГЕОМЕТРІЯ В ЗАДАЧАХ¹

Пам'яті Ізраїля Мойсейовича Гельфанда



¹Розділи 1–10 перекладено та розміщено у вільному доступі з люб'язного дозволу автора.

Переклад з російської В. О. Василенко та С. Ю. Ігнатович за участю Валерії Гончарової, Лоліти Мантули, Аркадія Костроміна.

Повний текст книги російською мовою знаходиться у вільному доступі за адресою www.mccme.ru/free-books/shen/shen-geometry.pdf

Фотографія: Б'ярне Пар Бюрнак (Bjarne Pagh Byrnek), див. www.bjarne.altervista.org/rct/introduction.html

Зміст

Передмова	5
1. Вимірювання відрізків	6
2. Вимірювання кутів	10
3. Нерівність трикутника	17
4. Рівні фігури	24
5. Ознаки рівності трикутників	26
6. Рівнобедрені трикутники	32
7. Коло	37
8. Побудови циркулем і лінійкою	41
9. Паралельність	45
10. Прямокутні трикутники	55
11. Паралелограми	
12. Прямокутник, ромб, квадрат	
13. Клітчастий папір	
14. Рівносторонні трикутники	
15. Середня лінія трикутника	
16. Теорема Фалеса	
17. Трапеція	
18. Найпростіші нерівності	
19. Осьова симетрія	
20. Центральна симетрія	
21. Кути у колі	
22. Дотичні	
23. Два кола	
24. Описане коло. Серединні перпендикуляри	
25. Вписане коло. Бісектриси	
26. Вписані й описані чотирикутники	
27. Площі	
28. Теорема Піфагора	
29. Подібність	
30. Координати на прямій	
31. Координати на площині	
32. Спільна міра	
33. Тригонометрія	
Післямова	

Передмова

Дорогі читачі-школярі та їхні батьки!²

У цій книжці зібрано понад 750 задач зі шкільного курсу планіметрії, більшою частиною нескладних (але є й важкі). До їх числа входять основні теореми цього курсу. Розв'язуючи задачі, ви познайомитеся з основними фактами і методами планіметрії (або згадаєте їх ще раз, якщо вже проходили в школі).

Задачі розбито за темами. Перед кожним розділом ми коротко нагадуємо основні означення та факти, які можуть знадобитися при розв'язуванні задач. Для більшої частини задач наведено розв'язки. Проте ми радимо не поспішати читати розв'язок. Краще спочатку спробувати розв'язати задачу (або принаймні як слід усвідомити її умову). Тоді розв'язки (іноді досить короткі) буде легше прочитати і зрозуміти.

У книжці також наводяться задачі для самостійного розв'язання. Для багатьох з них дані короткі вказівки.

Бажаємо успіхів!

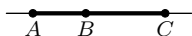
²Обговорення принципів відбору задач для цього збірника, яке розраховане на викладачів математики, винесене до післямови.

1. Вимірювання відрізків

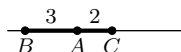
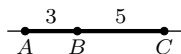
Дві геометричні фігури (відрізки, кути, трикутники та ін.) вважаються рівними, якщо їх можна накласти одна на одну так, щоб вони сумістилися.

Відрізки рівні, якщо рівні їхні довжини.

Якщо точка B лежить на відрізку AC , то $AB + BC = AC$.



1. На прямій обрано три точки A , B і C , причому $AB = 3$, $BC = 5$. Чому може дорівнювати AC ? (Існують різні можливості.)



▷ Якщо точка B знаходиться між точками A і C , то ця відстань дорівнює $3 + 5 = 8$. Але можливий і інший випадок, коли B знаходиться поза відрізком AC . Намалювавши рисунок, впевнюємося, що в цьому випадку відстань дорівнює $5 - 3 = 2$. ◁

2. На прямій обрано чотири точки A , B , C , D , причому $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чому може дорівнювати AD ? Укажіть усі можливості.

▷ Спочатку подивимось, чому може дорівнювати відстань між точками A і C . Як і в попередній задачі, тут є дві можливості (точка B всередині AC або зовні) — і виходить або 3, або 1. Тепер ми отримуємо дві задачі: в одній з них $AC = 3$ і $CD = 4$, в другій — $AC = 1$, $CD = 4$. Кожна має по дві відповіді, тож всього відповідей виходить чотири: $4 + 3$, $4 - 3$, $4 + 1$ та $4 - 1$. Відповідь: відстань AD може дорівнювати 1, 3, 5 або 7. ◁

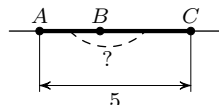


3. На дерев'яній лінійці відмічено три поділки: 0, 7 і 11 сантиметрів. Як відкласти за її допомогою відрізок у (а) 8 см; (б) 5 см?

▷ Використовуючи поділки 7 та 11, легко відкласти 4 сантиметри. Зробивши це двічі, отримаємо відрізок у 8 сантиметрів. Відкласти 5 сантиметрів трохи складніше: якщо вміємо відкласти 8 та 7, зможемо відкласти 1 сантиметр. Зробивши це 5 разів, отримуємо 5 сантиметрів. ◁

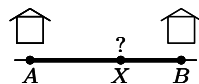
Можна зробити по-іншому: ми вміємо відкласти 4 см та 1 см, тож можна відкласти їх поспіль і отримати 5 см. Ще один спосіб: $5 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 7$, тож достатньо відкласти 3 рази по 11 см і потім 4 рази по 7 в інший бік. (Перевага наведеного спочатку способу в тому, що він підходить для будь-якого цілого числа сантиметрів).

4. Точка B лежить на відрізку AC довжиною 5. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і BC .

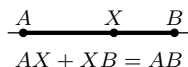


▷ Точку B можна вибирати по-різному. Наприклад, нехай вона ділить відрізок AC на частини в 1 см та 4 см. Середини цих частин (відрізків AB і BC) відстоять від B на 0,5 см і на 2 сантиметри, разом виходить 2,5 см. Спробувавши інші варіанти розміщення точки B , можна впевнитися, що у всіх випадках відстань між серединами відрізків AB і BC дорівнює 2,5 см. Чому? Справа в тому, що ця відстань утворена з половин відрізків AB і BC . Разом ці відрізки дорівнюють 5 см, отже, їхні половини разом дорівнюватимуть 2,5 см. ◀

5. У селі біля прямої дороги стоять дві хатини A і B на відстані 50 метрів одна від одної. В якій точці дороги треба побудувати колодязь, щоб сума відстаней від колодязя до хатин була б найменшою?



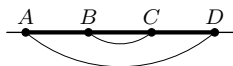
▷ Якщо діяти по справедливості, то треба побудувати колодязь посередині між хатинами: тоді до кожної буде 25 метрів, а в сумі 50. Але з точки зору умови задачі будь-яка точка X на ділянці дороги між A і B однаково гарна, оскільки в сумі відрізки AX і XB дорівнюють 50 метрів. (Наприклад, якщо побудувати колодязь у 10 метрах від A , то відстані будуть 10 і 40 метрів, тобто 50 у сумі.) ◀



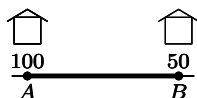
6. Та ж сама задача для трьох і чотирьох хатин, що стоять вздовж дороги з інтервалами в 50 метрів: де треба будувати колодязь у такому разі?

▷ Для трьох хатин: якщо середню хатину не враховувати, то всі точки на відрізку між край-

німи хатинами були б однаково гарні. Отже, найкраще положення колодязя для трьох хатин — біля середньої хатини.

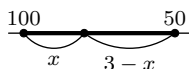


Для чотирьох хатин (позначимо їх A, B, C, D): будемо окремо розглядати дві крайні хатини (A, D) і окремо дві середні (B, C). У першому випадку всі точки відрізка AD однаково гарні: сума відстаней до A і D буде 150 метрів. У другому найменшу суму довжин (50 метрів) дають точки меншого відрізка BC . Відповідь: найменша сума довжин (200 метрів) досягається для всіх точок з відрізка BC . ◀



7. У селі A живе 100 школярів, у селі B живе 50 школярів. Відстань між селами 3 кілометри. В якій точці дороги від A до B треба побудувати школу, щоб сумарна відстань, яку проходять усі школярі, була якомога менше?

▷ Тут здається справедливим побудувати школу ближче до A , оскільки там більше школярів. Але наскільки ближче? Іноді пропонують побудувати школу в кілометрі від A і у двох від B (вдвічі більше школярів — вдвічі ближче школа). Але з точки зору поставленої задачі (сумарна відстань якомога менше) цей варіант не найкращий — краще за все побудувати школу прямо в A .



У цьому можна переконатися так: якщо відстані від школи до A і B дорівнюють x і $3 - x$ відповідно, то сумарна відстань, яку проходять усі школярі, дорівнює $100x + 50(3 - x) = 100x + 150 - 50x = 50x + 150$, тож вона найменша (і дорівнює 150 км), коли $x = 0$. ◀

Те ж саме можна пояснити і без формул: кожен метр зсуву школи в бік A скорочує на метр шлях для 100 школярів і подовжує на метр шлях для 50 школярів, тобто сумарний шлях зменшується на 50 метрів.

Можна сказати ще й так: розділимо всіх школярів A довільним чином на дві групи по 50 осіб. Якби другої групи не було, то було б все одно, де

будувати школу (задача про колодязь), — а з точки зору другої групи найкраще за все будувати її в A .

Ще кілька задач

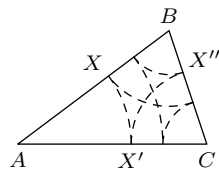
8. На прямій дано точки A , B і C . Відомо, що $AB = 5$, а відрізок AC довший за BC на 1. Знайдіть довжини відрізків AC і BC . Чи може точка B лежати поза AC ?

9. На прямій дано точки A , B і C . Відомо, що $AB = 5$, а відрізок AC довший за BC у півтора рази. Знайдіть довжини відрізків AC і BC . (Укажіть усі можливості.)

10. Точка B ділить відрізок AC у відношенні $2 : 1$. Точка D ділить відрізок AB у відношенні $3 : 2$. В якому відношенні ділить точка D відрізок AC ?

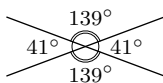
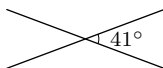
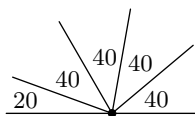
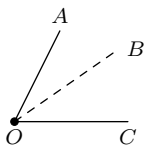
11. Точки C , D і E ділять відрізок AB у відношенні $1 : 2$, $1 : 3$ та $1 : 4$ відповідно. В якому відношенні точка D ділить відрізок CE ?

12. На стороні AB трикутника ABC взяли довільну точку X . Потім на стороні AC взяли точку X' , для якої $AX = AX'$. Після цього на стороні BC взяли точку X'' , для якої $CX' = CX''$ і так далі (див. рисунок). Доведіть, що після кількох разів ми потрапимо в початкову точку X .



13. Шість машин їдуть по дорозі з міста A до міста B . У даний момент вони знаходяться в різних точках дороги, але відомо, що сумарна відстань, яку проїхали (рахуючи від A) всі машини — 75 кілометрів, а до B залишилось їм їхати (також у сумі) 45 кілометрів. Яка довжина дороги з A до B ?

2. Вимірювання кутів



Кути рівні, якщо рівні їхні величини.

Якщо промінь OB ділить кут AOC на дві частини, то кут AOC дорівнює сумі його частин AOB і BOC (запис: $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$).

Розгорнутий кут (кут між двома половинами однієї прямої) вважається рівним 180 градусам (180°). Іншими словами, градус — це $1/180$ частина від розгорнутого кута.

Прямий кут — половина розгорнутого, тобто 90° .

Кути, менші від прямого, називають *гострими*, а більші від прямого — *тупими*.

14. Маємо дерев'яний косинець із кутом у 40° . Як побудувати за його допомогою кут (а) 80° ; (б) 160° ; (в) 20° ?

▷ Побудувати кут у 80° легко — треба відкласти двічі кут по 40° . Далі утворяться кути в 120° і в 160° (який нам потрібний). Зауважимо тепер, що 20° — це доповнення 160° до розгорнутого кута, тож якщо ми продовжимо одну зі сторін кута в 160° за його вершину, то отримаємо шуканий кут у 20° . ◁

15. Один з чотирьох кутів, що утворюються при перетині двох прямих, дорівнює 41° . Чому дорівнюють три інші кути?

▷ Сусідні кути доповнюють кут у 41° до розгорнутого, який дорівнює 180° , тому вони містять $180^\circ - 41^\circ = 139^\circ$. У свою чергу, щоб доповнити кут у 139° до розгорнутого, потрібний кут у $180^\circ - 139^\circ = 41^\circ$. Таким чином, два кути з трьох дорівнюють 139° , а один — 41° . ◁

16. У Парижі протягом довгого часу зберігався еталон метра (доки метр не почали визначати через швидкість світла і одиниці часу), проте еталону градуса там ніколи не було. Як ви вважаєте, чому?

▷ Спеціального еталону не треба: будь-яка

пряма може вважатися еталоном розгорнутого кута. $\triangleleft$

При перетині двох прямих утворюються чотири кути. Якщо два з них мають спільну сторону, їх називають *суміжними*, якщо не мають — *вертикальними*.

17. Суміжні кути в сумі утворюють розгорнутий кут (180°). Виведіть звідси, що вертикальні кути рівні.

▷ Міркуємо як у задачі 15 — кожен з двох вертикальних кутів доповнює суміжний з ними кут до розгорнутого, отже, вони рівні. $\triangleleft$

18. На скільки градусів повертається за хвилину хвилинна стрілка? Годинна стрілка?

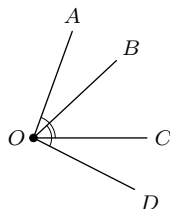
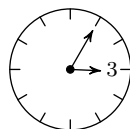
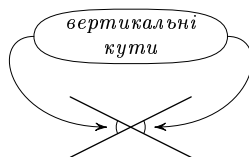
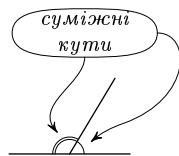
▷ За годину хвилинна стрілка робить цілий оберт, за півгодини вона повертається на 180° (розгорнутий кут). Півгодини — це 30 хвилин, отже, за хвилину вона повертається на $1/30$ частину кута в 180° , тобто на $180/30 = 6^\circ$.

Годинна стрілка за годину проходить $1/12$ частину кола, тобто рухається у 12 разів повільніше, ніж хвилинна. За хвилину вона повертається на $0,5^\circ$. $\triangleleft$

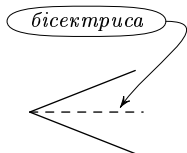
19. Який кут утворюють хвилинна і годинна стрілки рівно о 3 годині 05 хвилин?

▷ За п'ять хвилин, що пройшли після третьої години, хвилинна стрілка повернеться на 30° . Але для правильної відповіді треба врахувати, що повернеться і годинна стрілка. На скільки? За годину вона повертається на одне годинне ділення циферблату, тобто на ті ж 30° . Отже, за 5 хвилин вона повернеться на $1/12$ долю від 30° , тобто на $2,5^\circ$. Тепер легко отримати відповідь: від початкового кута в 90° треба відняти 30° і додати $2,5^\circ$, вийде $62,5^\circ$. $\triangleleft$

20. З точки O виходять промені OA , OB , OC , OD (див. рисунок). Відомо, що $\angle AOC = \angle BOD$. Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.



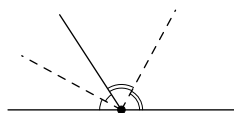
▷ Якщо від рівних величин відняти одне й те саме — залишаться рівні. Тут так і відбувається: від рівних кутів AOC і BOD ми віднімаємо їхній перетин — кут BOC . Залишаються якраз кути AOB і COD . ◁



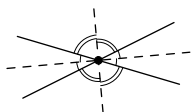
Промінь, який ділить кут навпіл, називається його *бісектрисою*.

Два промені (або дві прямі), які утворюють прямий кут, називають *перпендикулярними*.

21. Доведіть, що бісектриси двох суміжних кутів перпендикулярні. Доведіть, що бісектриси двох вертикальних кутів лежать на одній прямій.

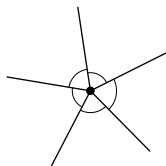


▷ Розглянемо два суміжні кути, кожен з яких поділений бісектрисою на дві рівні частини. Таким чином, розгорнутий кут поділений на чотири частини — дві рівні половини одного кута і дві рівні половини іншого. Якщо з цих чотирьох частин залишити тільки дві (по одній з кожної пари рівних), то вони утворюватимуть половину розгорнутого кута, тобто прямий кут. Першу частину задачі розв'язано.



Нехай тепер дано дві прямі, у перетині яких утворюється чотири кути. Нам треба довести, що бісектриси протилежних (вертикальних) кутів лежать на одній прямій, тобто продовжують одна одну. Проведемо бісектриси всіх чотирьох кутів. Ми вже бачили, що сусідні з них утворюють прямий кут. Два прямих кути в сумі дають розгорнутий, тож протилежні бісектриси дійсно лежать на одній прямій. ◁

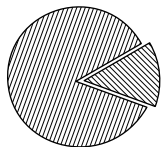
22. П'ять променів, які виходять з однієї точки, розрізають площину на п'ять рівних кутів. Знайдіть величину цих кутів.



▷ У сумі ці п'ять кутів утворюють повне коло, тобто два розгорнутих кути, $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. Кожен з них дорівнює одній п'ятій від 360° , тобто $360/5 = 72^\circ$. ◁

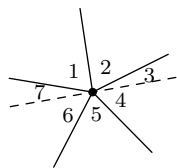
Ця задача і її розв'язок потребують певних коментарів. Справа в тому, що різні підручники геометрії

по-різному трактують поняття кута. Можна вважати, що кут — це геометрична фігура, яка складається з двох променів. А можна вважати, що кут — це не самі промені, а частина площини, яка знаходиться між ними. При такому розумінні два промені зі спільною вершиною визначають два кути: вони утворюються, якщо зробити розрізи по сторонах. Один з цих кутів менший, ніж розгорнутий, а другий більший.



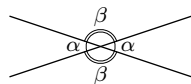
При першому підході максимально можлива величина кута — це 180° (розгорнутий кут), при другому — 360° (повне коло, яке можна умовно вважати доповненням до кута в 0°).

Яке відношення це має до попередньої задачі? Ось яке: якщо ми дозволяємо кути більші за 180° , то все просто — кут у 360° розрізаний на 5 рівних частин, сума яких дорівнює 360° , і т. д. Якщо ж ми не хочемо говорити про кути, що більші за 180° , то це міркування не підходить і треба діяти трохи складніше. Проведемо яку-небудь пряму через задану точку, яка розділить два з п'яти кутів на частини. Всього вийде 7 частин. У сумі ці частини дають стільки ж, скільки наші п'ять кутів (кожний розрізаний кут дорівнює сумі двох його частин). З іншого боку, ці частини складаються в два розгорнутих кути, тому в сумі дають $2 \times 180^\circ$.



23. З точки виходять чотири промені, які ділять площину на чотири кути. При цьому виявилось, що (рахуючи проти годинникової стрілки) перший кут дорівнює третьому, а другий — четвертому. Доведіть, що промені утворюють дві прямі (продовжуючи один одного).

► Позначимо перший і третій кути (вони рівні) через α , а другий і четвертий — через β . Тоді $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 360^\circ$, тобто $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, тому $2(\alpha + \beta) = 360^\circ$, і $\alpha + \beta = 180^\circ$. А кути, які знаходяться поряд і в сумі дають 180° , утворюють розгорнутий кут. ◀



Ще кілька задач

24. Маємо дерев'яний косинець із кутом у 19° . Як побудувати за його допомогою кут в 1° ? (Що буде, якщо відкладати кут у 19° , доки не вийде повне коло?)

25. Прямий кут розділений двома променями на три кути. Один з них на 10° більший, ніж другий, та на 10° менший, ніж третій. Знайдіть величини кутів. [Відповідь: 30° , 20° , 40° .]

26. Прямий кут розділений двома променями на три кути. Один з них у два рази менший, ніж другий, і в три рази менший, ніж третій. Знайдіть величини кутів. [Відповідь: 15° , 30° , 45° .]

27. Опівдні хвилинка і годинна стрілки збіглися. Коли вони сумістяться наступного разу? [Відповідь: Через 12/11 години.]

28. Скільки разів упродовж доби годинна і хвилинка стрілки збігаються? Скільки разів вони утворюють розгорнутий кут? прямий кут?

29. Через точку на площині провели 10 прямих, після чого площину розрізали по цих прямих на кути. Доведіть, що хоча б один з цих кутів менший від 20° . (Разом 20 променів, 20 кутів по 20° дають $400^\circ > 360^\circ$.)

30. З однієї точки виходять чотири промені OA , OB , OC , OD (перераховані за годинниковою стрілкою), які ділять площину на чотири кути, три з яких такі: $\angle AOB = 45^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ$, $\angle COD = 105^\circ$. Знайдіть четвертий кут AOD . Знайдіть кути AOC і BOD . [Відповідь: 120° , 135° , 165° (якщо брати кут, менший від 180° ; якщо ж додавати BOC і COD , то вийде кут у 195° , більший від розгорнутого).]

31. З однієї точки проведені три промені OA , OB і OC . Відомо, що $\angle AOB = 10^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$. Чому може дорівнювати кут AOC ? Укажіть усі можливості. [Відповідь: 10° , 30° .]

32. З однієї точки проведені чотири промені OA , OB , OC і OD . Відомо, що $\angle AOB = 10^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$, $\angle COD = 40^\circ$. Чому може дорівнювати кут AOD ? Укажіть усі можливості. [Відповідь: 10° , 30° , 50° , 70° .]

33. Кут AOB дорівнює 100° . Промінь OC про-

ведений так, що кут $\angle AOC$ на 10° більший за кут $\angle BOC$. Чому дорівнюють кути $\angle AOC$ і $\angle BOC$? (Укажіть усі можливості.) [Відповідь: 55° , 45° ; другий варіант — 135° , 125° .]

34. Кут $\angle AOB$ дорівнює 100° . Промінь OC проведений так, що кут $\angle AOC$ у півтори рази більший за кут $\angle BOC$. Чому дорівнюють кути $\angle AOC$ і $\angle BOC$? (Укажіть усі можливості.) [Відповідь: 60° , 40° ; другий варіант — 156° , 104° .]

35. З точки провели чотири промені, що ділять площину на чотири кути, які пронумерували за годинниковою стрілкою. Доведіть, що якщо перший і третій кути рівні, то бісектриси другого і четвертого лежать на одній прямій.

36. З точки на аркуші паперу провели чотири промені, які ділять площину на чотири кути. Потім аркуш розрізали по бісектрисах цих кутів на чотири частини (які також є кутами). Доведіть, що два з цих кутів утворюють у сумі 180° , і два інші — також.

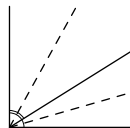
37. Прямий кут поділений на два кути. Знайдіть кут між бісектрисами отриманих кутів.

38. З паперу вирізано багато однакових кутів, величина яких становить ціле число градусів. Відомо, що 21 такий кут можна прикласти один до одного, і вони ще не заповнять усієї площини, а 22 вже не вмістяться. Знайдіть величину кутів. [Відповідь: $360/21 > x > 360/22$; $x = 17^\circ$.]

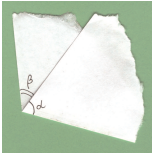
39. Чи можна намалювати трикутник і точку всередині нього, з якої будь-яку сторону видно під прямим кутом? ($3 \times 90 = 270 < 360$.)

40. Бджолині соти утворені з однакових шестикутників, що прилягають один до одного, причому усі кути в цих шестикутниках рівні. Чому дорівнюють ці кути?

41. З точки O на площині виходять чотири промені OA , OB , OC і OD (перераховані проти годинникової стрілки). Відомо, що сума кутів



AOB і COD дорівнює 180° . Доведіть, що бісектриси кутів AOC і BOD перпендикулярні.



42. Шматок паперу з прямим краєм перегнули по прямій і сплющили (див. рисунок). Як знайти кут β , якщо відомий кут α ?

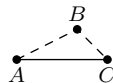
43. Ви хочете намалювати в зошиті прямий кут, але забули косинець вдома. Як це можна зробити? [Відповідь: Взяти аркуш паперу з прямим краєм і скласти його навпіл; якщо прямого краю немає, можна спочатку скласти сам аркуш удвічі й потім учетверо.]



44. Клаптик паперу зігнули і сплющили, а потім розгорнули і відмітили лінії згину — чотири промені, які утворюють чотири кути. Виявилося, що два з цих кутів (сусідні) дорівнюють 57° і 83° . Чому дорівнюють інші два кути?

3. Нерівність трикутника

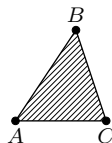
Якщо точка B не лежить на відрізку AC , то відстань AC менша, ніж сума відстаней AB і BC .



прямий шлях ($A \rightarrow C$)
коротший за непряий
($A \rightarrow B \rightarrow C$)

45. Доведіть, що в трикутнику будь-яка сторона менша, ніж сума двох інших сторін. (Трикутник — фігура з трьох точок, які не лежать на одній прямій і з'єднані відрізками. Точки ці називаються *вершинами*, а відрізки — *сторонами* трикутника.)

▷ Насправді ця задача просто повторює наведене вище твердження: якщо A , B і C — вершини трикутника, AC — одна з його сторін, а AB і BC — дві інші сторони, то якраз і треба довести, що $AC < AB + BC$. (Точка B не лежить на відрізку AC , оскільки точки A , B і C не лежать на одній прямій.) ◁

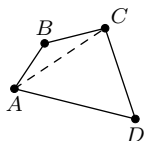
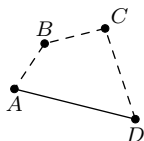


Тому наведену вище нерівність ($AC < AB + BC$) так і називають — *нерівність трикутника*.

Нерівність трикутника можна сформулювати й так: $AB + BC \geq AC$, причому рівність досягається в тому й тільки в тому випадку, коли точка B лежить на відрізку AC .

46. Відстань AB дорівнює 5, а відстань BC дорівнює 3. Чи може відстань AC дорівнювати 9? Чи може відстань AC дорівнювати 1?

▷ На обидва питання відповідь негативна. У першому випадку це неможливо, оскільки AC не може бути більша за $AB + BC = 5 + 3 = 8$. У другому випадку справа трохи складніша, і треба застосувати нерівність трикутника до тих самих точок в іншому порядку. Якщо $AC = 1$, то вийде, що $AC + CB = 3 + 1 = 4$; між тим $AB = 5$. Виходить, що $AB > AC + CB$, чого не може бути (нерівність трикутника, тільки точки перейменовано). ◁



47. На площині дано чотири точки A, B, C і D . Доведіть, що $AD \leq AB + BC + CD$.

▷ Цю нерівність можна було б назвати *нерівністю чотирикутника* і прочитати так: сторона чотирикутника не більша, ніж сума трьох інших його сторін. (Або так: ламаний шлях $ABCD$ не коротший, ніж прямий AD .) Вона є наслідком нерівності трикутника, і щоб побачити це, достатньо провести у чотирикутнику діагональ. Справді, якщо в сумі $AB + BC + CD$ замінити два перших доданки на AC , то за нерівністю трикутника сума зменшиться (або залишиться тією ж самою, якщо точка B лежить на відрізку AC). Залишається вдруге застосувати нерівність трикутника і зауважити, що $AC + CD \geq AD$.

Повторимо наше міркування більш формально. За нерівністю трикутника, $AB + BC \geq AC$. Додаючи до обох частин CD , бачимо, що $AB + BC + CD \geq AC + CD$. З іншого боку, за нерівністю трикутника $AC + CD \geq AD$. ◁

48. Доведіть, що в трикутнику будь-яка сторона менша, ніж половина периметра (суми сторін).

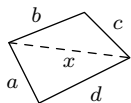
▷ Тут зручно позначити сторони трикутника літерами a, b та c . Тоді півпериметр буде $(a + b + c)/2$ і нам треба довести, що сторона трикутника (нехай a) менша, тобто що

$$a < \frac{a + b + c}{2}.$$

Зручніше помножити обидві частини нерівності на 2 і доводити, що $2a < a + b + c$. А це зрозуміло, оскільки $a < b + c$ за нерівністю трикутника і залишається додати a до обох частин. ◁

49. Доведіть, що в чотирикутнику будь-яка діагональ менша, ніж половина периметра (сума чотирьох сторін).

▷ Нехай діагональ чотирикутника зі сторонами a, b, c, d дорівнює x (див. рисунок). Вона розбиває його на два трикутники. Запишемо дві

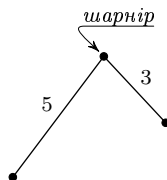


нерівності для цих трикутників:

$$x < a + b; \quad x < c + d.$$

Якщо їх додати, вийде, що $2x < a + b + c + d$.
Залишається поділити обидві частини навпіл. $\triangleleft$

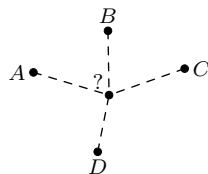
50. Дволанковий шарнір утворений з ланок довжиною 5 і 3 см, кінці яких з'єднані так, що можуть обертатися одна відносно одної (див. рисунок). Яка відстань (мінімальна і максимальна) може бути між іншими кінцями?



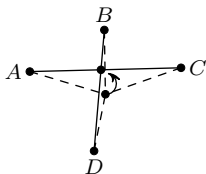
▷ Питання можна сформулювати так: в яких границях може змінюватися відстань AC , якщо $AB = 5$, $BC = 3$? Нерівність трикутника каже, що AC не може бути більшою за $AB + BC = 5 + 3 = 8$ см. Це значення досягається, якщо точки A , B , C лежать на одній прямій (у вказаному порядку). Отже, максимальне значення AC є 8. З іншого боку, відстань AC не може бути менша, ніж 2, оскільки в такому разі $AC + CB$ було б менше, ніж $2 + 3 = 5$, що суперечить нерівності $AC + CB \geq AB$. Мінімальне значення $AC = 2$ досягається, коли C лежить на відрізку AB . $\triangleleft$

Наочно це можна пояснити так: якщо тягнути за кінці шарніра, намагаючись максимально розвести їх один від одного, то він повністю розкриється, відрізки AB і BC будуть продовжувати один одного і відстань AC буде дорівнювати 8. Навпаки, якщо ми намагаємося наблизити C до A наскільки можливо, то C буде на відрізку AB . При цьому AC буде дорівнювати 2.

51. Чотири будинки A , B , C і D розташовані у вершинах чотирикутника (див. рисунок). Де треба вирити колодязь X , щоб сума відстаней від нього до чотирьох будинків була найменшою?

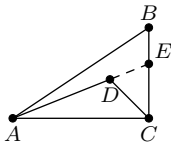


▷ Якщо дбати тільки про мешканців будинків A і C , забувши про інтереси мешканців B і D , то оптимальними будуть точки X на відрізку AC (і з точки зору суми $AX + XC$ вони всі однаково гарні). Аналогічним чином, з точки зору суми

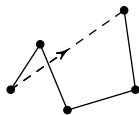


$BX + XD$ оптимальними є точки відрізка BD . Тому точка перетину AC і BD є оптимальною у всіх відношеннях: для неї обидві суми $AX + XC$ і $BX + XD$ набувають мінімально можливі значення, а отже, загальна сума $AX + BX + CX + DX$ також мінімальна. $\triangleleft$

52. В середині трикутника ABC взято точку D . Доведіть, що $AD + DC \leq AB + BC$.

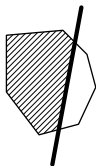


$\triangleright$ Щоб розв'язати цю задачу, зробимо, як кажуть, *додаткову побудову*: продовжимо відрізок AD за точку D до перетину зі стороною BC . Назвемо точку перетину E . Тепер візьмемо $AE + EC$ як проміжну величину для порівняння. Шлях $A-B-C$ довший за шлях $A-E-C$, адже ділянка $E-C$ у них спільна, а $AB + BE$ довший, ніж AE , за нерівністю трикутника. Далі, шлях $A-E-C$ довший, ніж шлях $A-D-C$, оскільки ділянка $A-D$ у них спільна, а $DE + EC > DC$. $\triangleleft$



53. Доведіть, що довжина ламаної лінії (неперервної лінії, що утворена з кількох відрізків) не менша, ніж відстань між її кінцями. (Таким чином, прямий шлях завжди коротший, ніж непряий.)

$\triangleright$ Будемо спрямляти наш шлях поступово. Візьмемо якусь ділянку шляху з двох ланок PQ і QR і замінімо ділянку $P-Q-R$ на відрізок $P-R$. За нерівністю трикутника шлях скоротиться, а кількість ланок ламаної зменшиться на 1. Після кількох таких скорочень ми й отримаємо прямий шлях. $\triangleleft$



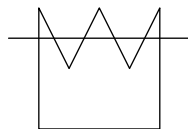
54. Багатокутник розрізали по прямій на дві частини. Доведіть, що периметр кожної з частин менший, ніж периметр початкового багатокутника. (Іншими словами, якщо відрізати від паперового багатокутника шматок, зробивши прямий розріз, то його периметр зменшиться.)

$\triangleright$ Периметр кожної з частин відрізняється від повного периметра початкового багатокутника тим, що ламана ділянка шляху замінена на пря-

му. Від цього периметр може тільки зменшитися.

◁

Ця задача потребує певного пояснення. Взагалі кажучи, пряма може ділити багатокутник не на дві частини, а на три або навіть більше (див. рисунок). Такі багатокутники називають *неопуклими*. Але й у цьому разі периметр кожної частини (за тими ж причинами) не більший, ніж периметр початкового багатокутника.



Можна по-різному пояснювати, що таке опуклий багатокутник. Ось кілька варіантів: багатокутник опуклий, якщо

- будь-який відрізок, що з'єднує дві точки всередині багатокутника, цілком лежить у ньому;
- багатокутник лежить по один бік від будь-якої прямої, що проведена по його стороні;
- усі кути в ньому менші, ніж 180° ;
- його можна вирізати з паперу, розрізаючи його по прямих.

Інтуїтивно ясно, що всі ці властивості описують одні й ті самі багатокутники (як кажуть математики, *еквівалентні*), але строго довести це (і навіть сформулювати) зовсім не просто.

55. Один опуклий багатокутник лежить всередині іншого. Доведіть, що периметр внутрішнього багатокутника менший, ніж периметр зовнішнього.

▷ Внутрішній багатокутник можна вирізати з зовнішнього, проводячи розрізи по сторонах. Кожний з таких розрізів відтинає від багатокутника, що залишається, шматок і (як ми бачили в задачі 54) зменшує периметр, доки зрештою не вийде внутрішній багатокутник. ◁

Ще кілька задач

56. Чи може в трикутнику сторона бути вдвічі більша за другу сторону і вдвічі менша за третю? [Відповідь: $x/2 + x < 2x$, ні.]

57. Триланковий шарнір утворений з ланок довжиною 2, 5 і 8 см. Яка відстань (мінімаль-

на і максимальна) може бути між його кінцями? [Відповідь: 1, 15.]

58. Доведіть, що в чотирикутнику сума діагоналей менша, ніж периметр (сума сторін).

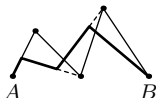
59. В середині трикутника ABC взято точку X . Доведіть, що сума відстаней $XA + XB + XC$ не менша, ніж половина периметра трикутника. (Скористайтеся нерівністю $XA + XB \geq AB$ і аналогічними.)

60. Один опуклий чотирикутник знаходиться всередині іншого. Чи може сума діагоналей внутрішнього чотирикутника бути більша, ніж сума діагоналей зовнішнього? (Може, особливо якщо в зовнішнього одна діагональ довга, а інша — коротка.)

61. Твердження задачі 52 є простим наслідком задачі 54. Чому? (Менший трикутник можна отримати з більшого, відрізавши шматок двічі.)

62. Чи може пряма перетинати всі сторони неопуклого 4-кутника? [Відповідь: Так.]

63. Чи може пряма перетинати всі сторони неопуклого 5-кутника? (Ні: ми не можемо п'ять разів перейти пряму канаву й повернутися в початкову точку.)



64. Дві черепахи, ведуча та ведена, повзуть по площині з A до B . Вони повзуть по черзі: спочатку ведуча проповзає якусь відстань, потім ведена проповзає якусь відстань по прямій у бік ведучої, потім ведуча знов повзе кудись, потім ведена повзе у бік ведучої, і так далі. Нарешті, обидві вони доповзають до B . Покажіть, що ведена черепаха проповзла не більше, ніж ведуча. (Величина (шлях першої черепахи) – (шлях другої черепахи) – (відстань між черепахами) може тільки збільшуватися.)

Твердження цієї задачі сформулював (без доведення) Лев Толстой («Війна і мир», том 4): «...ще одна причина для уповільнення руху військ та для вичікування поставала перед Кутузовим. Мета російських військ

була — просування за французами. Шлях французів був невідомий, і тому, чим ближче йшли наші війська слідом за французами, тим більше вони проходили дороги. Тільки йдучи на певній відстані, можна було найкоротшим шляхом перетинати зигзаги, які робили французи.»³

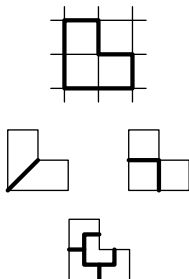
65. По один бік від прямої розташовано дві точки A і B на різних відстанях від неї. Як знайти на прямій точку X , для якої різниця між відстанями до цих двох точок максимальна?

³Переклад з російської О. Кундзича. Наводиться за виданням: Л. М. Толстой. Війна і мир / Київ: Держ. вид. худ. літ., 1953.

4. Рівні фігури

Дві геометричні фігури (трикутники, чотирикутники та ін.) вважаються *рівними*, якщо вони мають однакову форму і розмір, тобто якщо вони можуть бути суміщені одна з одною накладанням. При цьому фігуру дозволяється перевертати, тож, наприклад, літери R та Я вважаються рівними.

66. Куточок, що утворений з 3 квадратиків, можна розрізати на 2, 3 і на 4 рівні частини. Як це зробити?

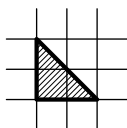


▷ На дві рівні частини розрізати легко: достатньо з'єднати кути (див. рисунок). Ще простіше розрізати на три рівні частини — на три квадратики.

Складніше розрізати куточок на 4 рівні частини, але й це можливо: вийде чотири менші куточки (див. рисунок). ◁

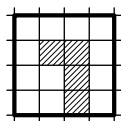
Дві фігури, які є рівними третій, рівні між собою.

67. Як за допомогою цієї властивості перевірити рівність фігур на двох рисунках у книжці (не вирізаючи фігур із книжки)?



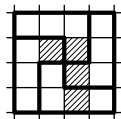
▷ Змалювати один рисунок на прозору плівку (кальку) і порівняти з іншим. ◁

68. Розріжте трикутник на рисунку на 4 рівні трикутники.



▷ Достатньо з'єднати між собою середини його сторін. ◁

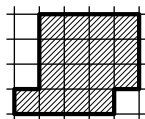
69. Розріжте квадрат на рисунку на чотири рівні частини так, щоб кожна з них містила по одному заштрихованому квадратику.



▷ Див. рисунок. ◁

Ще кілька задач

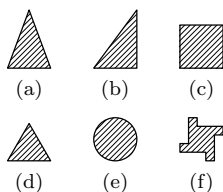
70. Розріжте фігуру на рисунку на дві рівні частини. А як розрізати її на три рівні частини? (Лінії розрізу не зобов'язані проходити по сторонах клітинок.)



71. Символ інь-ян складається з двох рівних фігур — білої і чорної. Разом вони утворюють круг. Як розрізати одну з цих фігур на 7 рівних частин? (Якщо ви здогадалися, як це зробити, то легко розріжете її на будь-яке число рівних частин.)



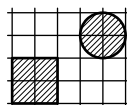
72. Деякі фігури можна покласти на своє місце кількома способами (наприклад, трикутник на рис. (а) можна залишити як є, а можна повернути навколо вертикальної осі — всього два способи), деякі — тільки одним (b). Скількома способами можна покласти на місце фігури рисунків (c), (d), (e), (f)?



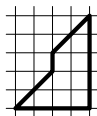
73. Квадрат можна розрізати на дві рівні частини багатьма способами. Два способи показано на рисунку (по діагоналі та по лінії, що з'єднує середини протилежних сторін). Як ще можна провести пряму, щоб розрізати квадрат на дві рівні частини?



74. Проведіть на рисунку пряму, яка розділить на дві рівні частини і квадрат, і круг.



75. Розріжте фігуру на рисунку на дві рівні частини.



5. Ознаки рівності трикутників

У рівних трикутників рівні (відповідні) сторони і кути.

Щоб переконатися в рівності двох трикутників, не треба звіряти *всі* сторони і кути — можна скористатися однією з *ознак рівності трикутників*.

Перша ознака: за двома сторонами і кутом між ними. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні, якщо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Друга ознака: за стороною і прилеглими до неї двома кутами. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні, якщо $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

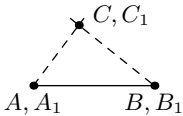
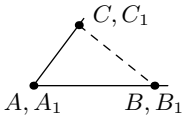
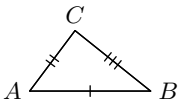
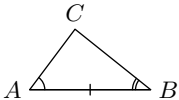
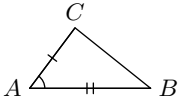
Третя ознака: за трьома сторонами. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні, якщо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

На рисунках показано ті елементи трикутника (сторони і кути), які потрібно звіряти, щоб скористатися цими ознаками рівності трикутників.

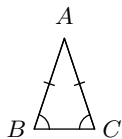
Наочне пояснення, чому ці ознаки правильні, зовсім просте для першої та другої ознак і трохи складніше для третьої.

Перша ознака. За припущенням кути A і A_1 рівні. Сумістимо їх один з одним так, щоб відрізок AB йшов уздовж A_1B_1 , а AC — вздовж A_1C_1 . Оскільки $AB = A_1B_1$, то точки B і B_1 при такому накладанні сумістяться. Аналогічно точки C і C_1 теж сумістяться. Отже, всі три вершини трикутників сумістяться.

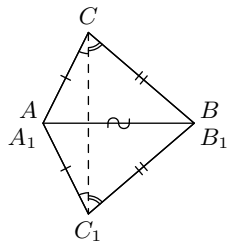
Друга ознака. Накладемо сторону AB на рівну їй сторону A_1B_1 , причому так, щоб точка A накладалася на A_1 , точка B накладалася на B_1 , а точки C і C_1 опинилися по один бік від AB . Тоді в силу рівності кутів A і A_1 пряма AC накладеться на A_1C_1 . З аналогічних причин пряма BC накладеться на B_1C_1 . Отже, точка C , в якій перетинаються прямі AC і BC , накладеться на точку C_1 , і трикутники сумістяться.



Для *третьої ознаки* нам знадобиться допоміжне зауваження: якщо в трикутнику дві сторони рівні, то і протилежні їм кути рівні. (Такий трикутник називають *рівнобедреним*.) Справді, нехай у трикутнику ABC сторони AB і AC рівні. Перевернемо його так, щоб точка A накладалася на себе, але сторона AB пішла по AC і навпаки. Оскільки $AB = AC$, то точка B накладесться на точку C і навпаки. Отже, кут B суміститься з кутом C , тобто вони рівні.



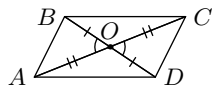
Тепер вже можна перейти до третьої ознаки рівності трикутників. Прикладемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ один до одного сторонами AB і A_1B_1 так, щоб C і C_1 опинилися по різні боки. Трикутники ACC_1 і BCC_1 рівнобедрені, тому однаково позначені на рисунку кути є рівними. Додавши їх, отримуємо, що кути C і C_1 рівні, залишається скористатися першою ознакою.



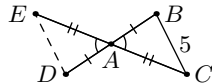
Ці пояснення не є «строгим доведенням», як кажуть математики, проте вони досить переконливі.

76. У чотирикутнику точка перетину діагоналей ділить кожну з них навпіл. Доведіть, що протилежні сторони цього чотирикутника рівні.

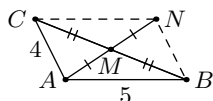
▷ Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, а O — точка перетину його діагоналей. Позначимо на рисунку пари рівних за умовою відрізків — одну пару одинарною рисою, іншу — подвійною. Крім того, позначимо вертикальні (і, отже, рівні) кути AOB і COD . Тепер є всі умови для застосування першої ознаки рівності до трикутників AOB і COD (дві сторони і кут між ними). З рівності цих трикутників виводимо, що $AB = CD$. Розглянувши два інших трикутники (які?), аналогічним чином переконуємося, що $BC = AD$.



77. На продовженні сторони AB трикутника ABC за точку A взято точку D , причому $AD = AB$. На продовженні сторони AC трикутника ABC за точку A взято точку E , причому $AE = AC$. Знайдіть відстань між точками D і E , якщо $BC = 5$.



▷ Ця задача розв'язується майже так само, як попередня. За умовою в трикутниках ABC і ADE (в якому треба провести ще сторону ED) є рівними по дві сторони: $AB = AD$, $AC = AE$. Кути BAC і DAE є вертикальними, і тому теж рівні. За першою ознакою рівні й трикутники, тож $ED = BC = 5$. ◁



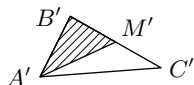
78. У трикутнику ABC медіана AM (відрізок, який з'єднує вершину A з серединою M сторони BC) продовжена за точку M на відстань, що дорівнює AM . Знайдіть відстань від отриманої точки до точок B і C , якщо сторони AB і AC дорівнюють відповідно 5 і 4.

▷ Нехай N — кінець медіани, що продовжена, тож N лежить на продовженні AM за точку M і $AM = MN$. Тоді в чотирикутнику $ABNC$ діагоналі діляться точкою перетину навпіл, отже можна посперитися на вже розв'язану задачу і побачити, що протилежні сторони чотирикутника рівні, тобто $NB = AC = 4$, $NC = AB = 5$. ◁

79. Доведіть, що в довільному трикутнику ABC медіана AM не перевищує півсуми сторін AB і AC .

▷ Нам треба довести, що подвоєна медіана не перевищує суми $AB + AC$. У попередній задачі якраз була побудована подвоєна медіана AN , яка була стороною трикутника ABN , дві інші сторони якого AB і $BN = AC$. Залишається посперитися на нерівність трикутника. ◁

80. Користуючись першою ознакою рівності трикутників, доведіть, що в двох рівних трикутниках медіани, проведені до відповідних сторін, рівні.



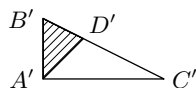
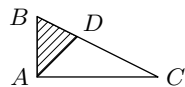
▷ Нехай ABC і $A'B'C'$ — ці трикутники (рівні сторони й кути позначено однаковими літерами), AM і $A'M'$ — медіани, що проведені в них (тож M — середина BC , а M' — середина $B'C'$). Подивимось на трикутники ABM і $A'B'M'$. У них рівні кути B і B' , сторони AB і

$A'B'$, а також сторони BM і $B'M'$ (як половини рівних сторін BC і $B'C'$). Тому ці трикутники рівні за першою ознакою, і відповідні сторони (в тому числі ті, що є медіанами) рівні.

Зауважимо, що ми з тим же успіхом могли б використовувати трикутники AMC і $A'M'C'$. $\triangleleft$

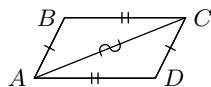
81. Користуючись другою ознакою рівності трикутників, доведіть, що в двох рівних трикутниках бісектриси, що ділять відповідні кути навпіл, рівні.

▷ (У задачі йде мова, звісно, про відрізки бісектрис до протилежної сторони.) Нехай AD і $A'D'$ — такі відрізки. Дотримуючись розв'язання попередньої задачі, розглянемо трикутники ABD і $A'B'D'$ — в них рівні сторони AB і $A'B'$, а також кути B і B' . Крім того, кут DAB дорівнює куту $D'A'B'$, оскільки вони становлять половини рівних кутів CAB і $C'A'B'$. Залишається скористатися другою ознакою рівності трикутників. $\triangleleft$



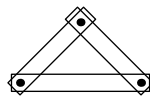
82. У чотирикутнику протилежні сторони парно рівні. Доведіть, що протилежні кути в ньому рівні. (Такі чотирикутники називаються *паралелограмами*, і ми до них ще повернемося).

▷ Нехай $ABCD$ — такий чотирикутник. Проведемо в ньому діагональ, наприклад, AC . Вона розіб'є його на два трикутники ABC і ADC , до яких можна застосувати третю ознаку рівності трикутників — сторона AC у них спільна, а дві інші пари сторін рівні за умовою. Отже, рівні й усі кути, зокрема, і кути B і D .



Аналогічне міркування (з якими трикутниками?) показує, що кути A і C рівні. $\triangleleft$

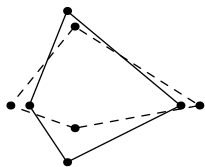
83. Три балки з'єднані болтами по кінцях (див. рисунок). Отримана конструкція буде жорсткою, хоча навколо болтів балки можуть повертатися. Яка ознака рівності трикутників є тому причиною?



▷ Балки є сторонами трикутника, а болти —

його кутами. Можливість обертання в точках кріплення означає, що кути трикутника не фіксовані. Зате довжини сторін — відстані між отворами в балках — змінюватися не можуть, і третя ознака рівності трикутників гарантує, що кути теж змінюватися не можуть. ◁

84. Чи є правильним таке твердження: якщо в двох чотирикутниках $ABCD$ і $A'B'C'D'$ відповідні сторони рівні ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ і т. д.), то чотирикутники рівні?



▷ Згадуючи попередню задачу, можна сформулювати питання так: чи буде жорстким шарнірний чотирикутник? Оразу ясно, що ні — взявшись руками за протилежні вершини, можна зсувувати їх і розсовувати. На рисунку показані два положення шарнірів — два різних чотирикутники з відповідно рівними сторонами. ◁

Усі три ознаки рівності трикутників мають один і той самий загальний вигляд: трикутник визначається деякими трьома елементами однозначно. (У першій ознаці це дві сторони і кут між ними, у другій — сторона і два прилеглих кути, в третій — три сторони.) Проте не слід думати, що ці три елементи можуть бути будь-якими. Наприклад, ми побачимо далі, що три кути не визначають трикутник однозначно — бувають трикутники однакової форми, але різного розміру (див. рисунок). Такі трикутники називають *подібними*, і ми до них ще повернемося.



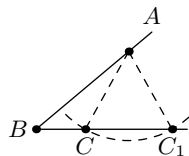
Хитріший приклад, коли трикутник не визначається трьома елементами, дає наступна задача:

85. Наведіть приклад трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, в яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, але які, проте, не є рівними.

Ця задача показує, що в ознаці рівності трикутників «за двома сторонами і кутом між ними» не можна пропустити слова *між ними*: якщо рівними є кути, що протилежні двом рівним сторо-

нам, це не гарантує рівності трикутників.

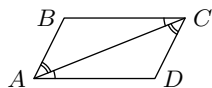
▷ Намалюємо гострий кут з вершиною B . На одній стороні візьмемо якусь точку A . На іншій стороні за допомогою циркуля знайдемо дві точки C і C_1 на рівній відстані від A . Тоді трикутники ABC і ABC_1 будуть шуканими. ◁



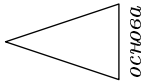
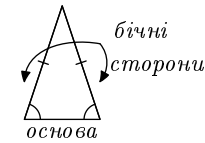
Ще кілька задач

86. Діагональ ділить опуклий чотирикутник на два рівних трикутники. Доведіть, що інша діагональ ділить чотирикутник або на два рівних трикутники, або на два рівнобедрених трикутники.

87. У чотирикутнику $ABCD$ проведено діагональ AC . Виявилось, що «перехресні» кути при цій діагоналі рівні: $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle ACB$. Доведіть, що протилежні сторони чотирикутника рівні.



6. Рівнобедрені трикутники



Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо дві його сторони рівні. Ці рівні сторони називають *бічними сторонами* трикутника, а третю сторону — його *основою*.

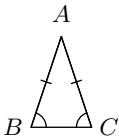
Слова «основа» і «бічні сторони» створюють враження, що основа повинна бути обов'язково нижньою (на рисунку) стороною трикутника, а бічні сторони повинні бути ліворуч і праворуч. Але математичні терміни, взяті зі звичайної мови, часто змінюють значення, і означають тільки те, що написано в означенні (а зовсім не те, що розуміє під цим нормальна людина у звичайному житті). У даному випадку вимагається лише рівність бічних сторін, тож основа цілком може бути, скажімо, вертикальною.

У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Якщо в трикутнику кути при основі рівні, то він рівнобедрений.

Ці два твердження можна сформулювати так: кути, протилежні до рівних сторін трикутника, є рівними; сторони, протилежні до рівних кутів трикутника, є рівними.

Їх можна розглядати як окремі випадки двох перших ознак рівності трикутників і пояснити тим же способом.

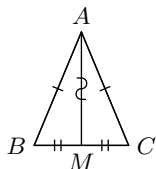


Перше: якщо трикутник ABC рівнобедрений і (скажімо) $AB = AC$, то перевернемо його і накладемо на себе так, щоб точка A залишилася на місці, а сторона AB пішла по AC — тоді AC піде по AB . Оскільки $AB = AC$, то точки B і C накладуться одна на одну. (Це міркування ми вже наводили, говорячи про третю ознаку рівності трикутників.)

Друге: перевернемо трикутник і накладемо BC на себе так, щоб B наклалася на C і навпаки. Ми припускаємо, що кути при основі рівні, тому бічні сторони накладуться на себе, і точка їхнього перетину — вершина A — залишиться на місці.

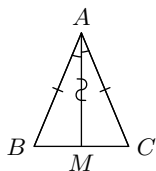
88. У рівнобедреному трикутнику проведено медіану, що з'єднує середину основи з протилежною вершиною. Доведіть, що ця медіана є *висотою* (перпендикулярна до основи) і *бісектрисою* (ділить кут навпіл).

▷ Позначимо наш трикутник через ABC (основа BC , бічні сторони AB і AC). Медіана AM з'єднує вершину A з серединою основи BC . Вона ділить трикутник на дві половини ABM і ACM . Легко бачити, що ці половини рівні за третьою ознакою (одна сторона спільна; дві інші рівні, тому що трикутник рівнобедрений; пара, що залишилася, — тому що медіана ділить основу навпіл). Отже, кути при вершині A рівні (медіана є бісектрисою). Кути при вершині M теж рівні і разом становлять 180° , тому кожен з них дорівнює 90° . Отже, медіана є висотою. ◁



89. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику ABC (де $AB = AC$) бісектриса кута при вершині (A) є висотою, тобто перпендикулярна до сторони BC , і медіаною, тобто ділить сторону BC навпіл.

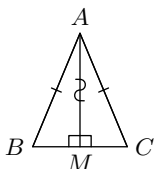
▷ Позначимо цю бісектрису через AM . Трикутники AMB і AMC мають рівні кути при вершині A (означення бісектриси) і дві пари рівних сторін, що утворюють ці кути (одна сторона спільна, дві інші рівні, оскільки трикутник рівнобедрений). Отже, за першою ознакою вони рівні. Зокрема, рівними є сторони MB і MC , тобто бісектриса є медіаною. Крім того, рівними є кути при вершині M , які в сумі дорівнюють 180° , отже, кожен з них дорівнює 90° , тож бісектриса є висотою. ◁



Втім, якщо придивитися, то ця задача в точності збігається з попередньою. Там ми повинні були довести, що в рівнобедреному трикутнику медіана є бісектрисою, а зараз — що бісектриса є медіаною. Тобто в обох випадках треба було довести, що бісектриса і медіана збігаються, тільки сформульовано це було по-різному. (І ще треба

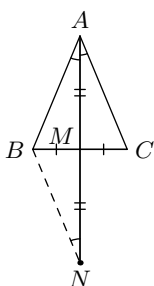
було довести, що ці збіжні бісектриса і медіана перпендикулярні до основи.)

90. У трикутнику ABC медіана AM , яка з'єднує точку A з серединою M сторони BC , є висотою, тобто перпендикулярна до сторони BC . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений: сторони AB і AC рівні.



▷ Подивимося на трикутники ABM і ACM . В них кути при вершині M прямі за умовою, $BM = CM$, а сторона AM — спільна. Отже, за першою ознакою рівності трикутників вони рівні. Зокрема, рівними є сторони, протилежні прямому куту: $AB = AC$. ◁

91. У трикутнику ABC медіана AM , що з'єднує точку A з серединою M сторони BC , є бісектрисою кута A . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений: сторони AB і AC рівні.



▷ Якщо спробувати міркувати як у попередній задачі, то можна помітити, що в трикутниках BMA і CMA рівними є по дві сторони і по одному куту. Але кут цей не лежить між сторонами, отже ознаки рівності трикутника тут не допомагають (див. задачу 85).

Тож ця задача складніша за попередню і для її розв'язання знадобиться, як кажуть, *додаткова побудова*. Ця побудова часто застосовується, коли в задачі йде мова про медіану (ми вже зустрічалися з нею в задачі 78).

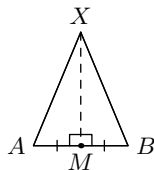
Продовжимо медіану AM за точку M на відстань, що дорівнює її довжині, і отримаємо точку N , яку з'єднаємо з точкою B . Ми вже бачили, що трикутник BMN є рівним трикутнику CMA по двом сторонам і куту між ними (кути при вершині M є вертикальними, $BM = MC$ за умовою, $AM = MN$ за побудовою). Зокрема, кут BNM дорівнює куту CAM , і тим самим куту BAM . Отже, в трикутнику ABN кути при стороні AN рівні, і тому він рівнобедрений: $AB = BN$. Але $BN = AC$ (з рівності трикут-

ників BNM і CMA), тож $AB = AC$, що й треба було довести. $\triangleleft$

|| *Серединним перпендикуляром* до відрізка називається пряма, що перпендикулярна відрізку і проходить через його середину.

92. Доведіть, що будь-яка точка серединного перпендикуляра до відрізка AB рівновіддалена (знаходиться на однаковій відстані) від точок A і B .

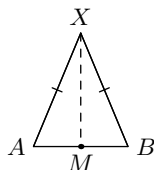
▷ Нехай M — середина відрізка AB , і X знаходиться на серединному перпендикулярі. З'єднаємо X з точками A і B . У трикутниках AMX і BMX два кути прямі, одна сторона (MX) спільна, а $AM = MB$. Тому ці трикутники рівні за першою ознакою, зокрема, $AX = XB$. $\triangleleft$



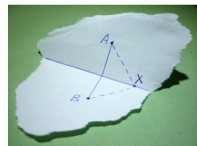
По суті, ми повторили міркування про те, що якщо медіана є висотою, то трикутник рівнобедрений.

93. Доведіть, що будь-яка точка, рівновіддалена від точок A і B , лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AB .

▷ Нехай точка X рівновіддалена від точок A і B . З'єднаємо її з цими точками, вийде рівнобедрений трикутник AXB . З'єднаємо точку X з серединою сторони AB , яку ми позначимо M . Вийде медіана XM цього рівнобедреного трикутника, яка, як ми знаємо, є висотою. Отже, XM є серединним перпендикуляром до AB (і точка X на ньому лежить). $\triangleleft$

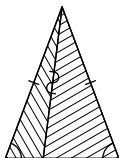


За допомогою цієї задачі можна пояснити таке спостереження: якщо папірець скласти вдвічі, а потім розгорнути, то лінія згину буде прямою. Проколемо складений папірець голкою і позначимо точки проколу на розгорнутому папірці (A і B). Покажемо, що всі точки лінії згину лежать на прямій — серединному перпендикулярі до відрізка AB . Справді, для будь-якої точки X на згині відрізки XA і XB рівні: адже при згині вони



суміщаються. Залишається скористатися щойно розв'язаною задачею.

94. Рівнобедрений трикутник розділений на два відрізком, що з'єднує вершину з деякою точкою основи. Доведіть, що в цих трикутниках можна знайти дві рівні пари сторін і рівну пару кутів.

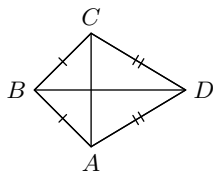


▷ Рівні пари сторін — це дві бічні сторони рівнобедреного трикутника, а також дві сторони, що примикають одна до одної по лінії розрізу. Рівні кути — кути при основі рівнобедреного трикутника. ◁

Ця задача нагадує, що в першій ознаці рівності трикутників важливо, щоб рівні кути знаходилися між відповідно рівними сторонами. (Пор. задачу 85 у попередньому розділі.)

Ще кілька задач

95. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ дві пари сторін рівні: $AB = BC$, $AD = DC$. Доведіть, що його діагоналі перпендикулярні. (З'єднайте вершини B і D з серединою діагоналі AC .)



96. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до його бічних сторін, рівні.

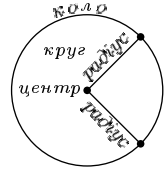
97. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до його бічних сторін, рівні.

98. Усі чотири сторони чотирикутника рівні. Доведіть, що його діагоналі ділять його на чотири рівних трикутники і перетинаються під прямим кутом.

99. У трикутнику медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена. Доведіть, що в цьому трикутнику один з кутів дорівнює сумі двох інших. (Згодом ми дізнаємося, що сума кутів трикутника дорівнює 180° , тому такий трикутник буде прямокутним.)

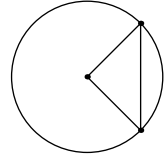
7. Коло

Точки, що лежать на заданій відстані від заданої точки (*центра*) утворюють *коло*. Відстань цю називають *радіусом* кола. Відрізок, що з'єднує центр кола з будь-якою з його точок, також називають радіусом. *Круг* — це коло разом з усіма точками всередині нього.



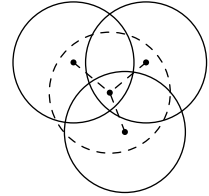
100. Центр кола і довільні дві точки на ньому є вершинами рівнобедреного трикутника.

▷ Це — зовсім проста задача: дві сторони отриманого трикутника є радіусами і тому рівні. ◁



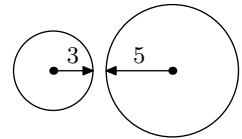
101. Точка X лежить всередині трьох кіл радіуса 1. Доведіть, що їхні центри можна накрити кругом радіуса 1.

▷ Намалюємо круг радіуса 1 з центром у точці X (на рисунку зображений пунктиром). За умовою точка X лежить всередині кіл. Отже, відстань від X до центрів кіл менша за 1. Тому ці центри попадуть всередину намальованого круга. ◁

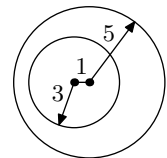


102. Два кола мають радіуси 3 і 5, відстань між їхніми центрами дорівнює 9. Чи будуть вони перетинатися? Те ж саме питання, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює 1.

▷ Перетину не буде. В першому випадку: якби X була спільною точкою двох кіл, то відстані до центрів від X були б 3 та 5, і за нерівністю трикутника відстань між центрами була б не більша, ніж 8.

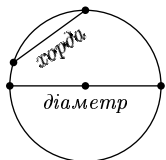
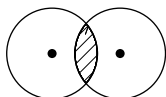
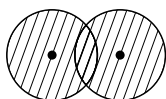


У другому випадку менше коло лежить цілком всередині більшого. Впевнитися у відсутності точок перетину знов можна за допомогою нерівності трикутника: якби X була точкою перетину, то відстань до центра меншого кола була б 3, відстань між центрами 1, отже, відстань до цен-



тра більшого кола була б не більша, ніж 4 (а вона дорівнює 5). <

103. Два села знаходяться на відстані 3 кілометра. Намалуйте, де можна влаштувати пікнік, якщо вимагається, щоб (а) відстань до *найближчого* села була не більша за 2 кілометри; (б) відстань до *будь-якого* села була не більша за 2 кілометри.

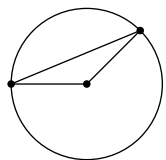


▷ Для кожного села є свій круг — у ньому знаходяться точки, до яких від села не більше 2 кілометрів. У пункті (а) нам підходять точки будь-якого круга, і відповіддю є (як кажуть математики) *об'єднання* кругів. У задачі (б) нам підходять лише точки, що попадають в обидва круга, і відповіддю буде *перетин* кругів. <

|| *Хордою* називається відрізок, що з'єднує дві точки кола. Хорда, яка проходить через центр кола, називається *діаметром*.

104. Довжина хорди не перевищує подвоєного радіуса кола (і дорівнює йому, тільки якщо хорда є діаметром).

▷ З'єднаємо кінці хорди з центром кола. Вийде трикутник, що утворений двома радіусами і хордою. За нерівністю трикутника хорда не перевищує суми двох інших сторін, тобто подвоєного радіуса. Рівність можлива, якщо трикутник перетворюється на відрізок, тобто якщо центр кола лежить на хорді. (А така хорда називається діаметром.) <



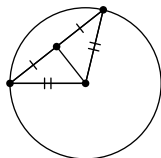
Діаметром кола називають не тільки хорду, що проходить через його центр, але й її довжину. Діаметр (як хорда) складається з двох радіусів (відрізків), тому діаметр кола (як число) дорівнює подвоєному радіусу (як числу).

Тепер твердження задачі 104 можна прочитати так: довжина будь-якої хорди кола не перевищує діаметра кола.

105. Доведіть, що відрізок, який з'єднує сере-

дину хорди з центром кола, є перпендикулярним до хорди.

▷ Цей відрізок є медіаною рівнобедреного трикутника, що утворений двома радіусами і хордою, і тому є його висотою. ◁



Ще кілька задач

106. На великому полі є вузька пряма канава довжиною 500 метрів. Турист стоїть на березі канави на відстані 200 метрів від її кінця (і 300 метрів від іншого кінця). Намалюйте частину поля, до якої він може потрапити, якщо пройде не більш ніж 400 метрів (і не переходитиме канави). (Ця область обмежена *дугами* (частинами) кіл.)

107. Кільцеве шосе має форму прямокутника зі сторонами 5 і 7 км. Турист хоче поставити намет так, щоб відстань від стоянки до найближчої точки шосе була не менша за кілометр. Намалюйте область можливих положень намету.

108. Два кола різних радіусів з центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках C і D . Доведіть, що пряма O_1O_2 перпендикулярна до відрізка CD і ділить його навпіл. (Обидві точки O_1 і O_2 лежать на серединному перпендикулярі до CD .)

109. Доведіть, що відстань між двома точками всередині круга не більша за діаметр круга. (Відрізок, який з'єднує ці точки, є частиною хорди.)

110. Доведіть, що хорда кола утворює рівні кути з радіусами, які проведені до її кінців.

111. Поглянувши навколо себе, ми побачимо досить багато кіл. Чи можете ви придумати правдоподібне пояснення, чому (або для чого) є круглими (а) колеса у велосипеда; (б) кола на воді; (в) місяць на небі; (г) крапля в повітрі; (д) кришки каналізаційних люків; (е) стовбури дерев; (є) монети; (ж) грампластинки і компакт-диски; (з) рулони туалетного паперу; (и) кришки від банок, які закручуються; (і) веселка на небі?

Не засмучуйтесь, якщо не можете — іноді пояснення потребує доброго знання фізики, а іноді є кілька правдоподібних варіантів, і важко обрати один з них.

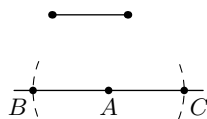
112. Дано дві (різні) точки A і B . Де може знаходитись точка C , якщо відомо, що трикутник ABC рівнобедрений (має дві рівні сторони)?

8. Побудови циркулем і лінійкою

За допомогою лінійки можна проводити пряму через дві дані точки. За допомогою циркуля можна будувати коло з даним центром і даним радіусом. Після цього можна позначати точки перетину побудованих прямих і кіл і використовувати їх у подальших побудовах.

113. Відкладіть від заданої точки A на заданій прямій l відрізок, рівний даному.

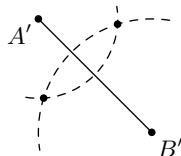
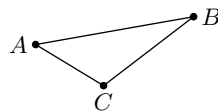
▷ Для цього достатньо циркуля: встановимо розхил циркуля рівним довжині даного відрізка і побудуємо коло такого радіуса з центром в A . Воно перетне пряму l у двох точках, назовемо їх B і C . Відрізки AB та AC і будуть шуканими.



Якби на лінійці були поділки (або хоча б можна було робити олівцем позначки), то циркуль не знадобився. Але для нас лінійка — це можливість проводити пряму через дві дані точки, і не більше того.

114. Дано трикутник ABC і відрізок $A'B'$, рівний відрізку AB . Побудуйте трикутник $A'B'C'$, рівний трикутнику ABC .

▷ Положення точок A' і B' нам дані. Треба знайти точку C' . Відстань від неї до точки A' відома: вона дорівнює AC . Отже, точка C' лежить на колі з центром в A' і радіусом AC . Побудуємо це коло. Аналогічним чином точка C' лежить на колі з центром у B' радіуса BC . Щоб розв'язати задачу, залишилося знайти точки перетину цих кіл. (Їх дві, оскільки трикутник можна відкласти по обидва боки від відрізка $A'B'$.)

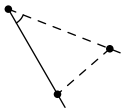
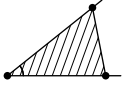


115. Побудуйте трикутник за трьома сторонами.

▷ Ця задача відрізняється від попередньої тим, що сторони трикутника задані самі по собі, а не у складі трикутника. Але розв'язання зали-

шається тим самим: ми беремо одну із заданих сторін, і навколо її кінців будуємо кола, радіуси яких дорівнюють двом іншим сторонам.

Зауважимо, що ці кола можуть і не перетнутися: якщо три заданих відрізки не задовольняють нерівності трикутника (один більший за суму двох інших), то шуканого трикутника не існує. <



116. Відкладіть від заданого променя кут, рівний даному.

▷ Цю задачу можна звести до попередніх. Візьмемо якісь дві точки на сторонах кута, вийде трикутник. Побудуємо рівний йому трикутник (провівши два кола і знайшовши їхній перетин). Один з кутів цього трикутника буде шуканим. <

Щоб задача мала єдиний розв'язок, треба ще вказати, в який бік від заданого променя треба відкладати кут (і тим самим яку з двох точок перетину кіл треба брати).

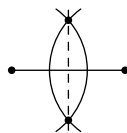
Ця задача легко дозволяє побудувати трикутник за стороною і двома прилеглими кутами: треба відкласти на якій-небудь прямій заданий відрізок, а потім провести два промені під заданими кутами.

Згадуючи ознаки рівності трикутників, можна ще зауважити, що побудувати трикутник за двома сторонами і кутом між ними зовсім просто: достатньо відкласти два дані відрізки на сторонах кута.

117. Знайдіть середину даного відрізка.

▷ Ми побудуємо серединний перпендикуляр до відрізка, тим самим буде знайдена його середина. Ми знаємо, що на серединному перпендикулярі лежать точки, однаково віддалені від кінців відрізка. Тому достатньо знайти дві такі точки і провести через них пряму. Щоб знайти їх, побудуємо два кола рівного радіуса з центрами в кінцях відрізка. Точки їхнього перетину і будуть шуканими.

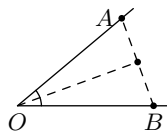
Отже, побудова: побудуємо два кола рівного радіуса з центрами в кінцях відрізка і з'єднаємо точки їхнього перетину прямою. Ця пряма і розділить відрізок навпіл. $\triangleleft$



Радіус кіл можна вибрати різним, але важливо, щоб він не був занадто маленьким, інакше кола не перетнуться. Можна, наприклад, за радіус взяти довжину початкового відрізка.

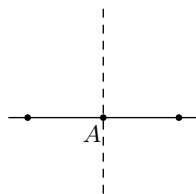
118. Розділіть даний кут навпіл.

▷ Нехай O — вершина кута. Відкладемо за допомогою циркуля на його сторонах рівні відрізки OA і OB (їхня довжина, тобто розхил циркуля, може бути будь-якою). Ми вже знаємо з розв'язку попередньої задачі, як будувати серединний перпендикуляр до відрізка AB . Точка O рівновіддалена від A і B за побудовою і тому лежить на цьому серединному перпендикулярі. Ми побудували висоту рівнобедреного трикутника OAB , яка одночасно буде і бісектрисою кута AOB . $\triangleleft$



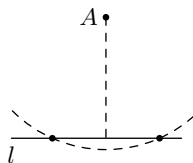
119. Дано точку A на прямій l . Проведіть через A пряму, перпендикулярну до l .

▷ Цю задачу легко звести до вже розв'язаних: ми вміємо будувати серединний перпендикуляр до відрізка (розв'язок задачі 117), тож достатньо знайти на прямій l відрізок, серединою якого була б точка A . А це легко зробити, відклавши від A рівні відрізки в різні боки. $\triangleleft$

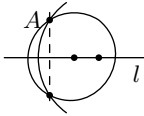


120. Дано точку A , що не лежить на прямій l . Проведіть через A пряму, перпендикулярну до l .

▷ Цю задачу також можна звести до попередніх: якщо провести коло з центром в A , що перетинає пряму в двох точках, то ці точки перетину рівновіддалені від A , і тому A лежить на серединному перпендикулярі до відрізка з кінцями в цих точках. А такий ми будувати вміємо. $\triangleleft$



Ще кілька задач



Більш економну побудову перпендикуляра з заданої точки A до заданої прямої l (яка не проходить через цю точку) наведено в підручнику І. Ф. Шаригіна: побудуємо два кола з центрами на прямій l , які проходять через точку A . Вони перетнуться в точці A і ще в одній точці; з'єднавши ці точки прямою, отримаємо шуканий перпендикуляр.

121. Покажіть, що ця побудова дійсно дає те, що вимагається.

122. Як розділити відрізок на чотири рівні частини циркулем і лінійкою?

123. Як розділити кут на чотири рівні частини циркулем і лінійкою?

Згодом ми навчимося ділити відрізок на будь-яке число рівних частин, див. задачу 305. А от із діленням кута на рівні частини ситуація зовсім інша: французький математик Ванцель у статті 1837 року довів, що для деяких кутів задача про *трисекцію кута* (ділення його на три рівні частини) не може бути розв'язана за допомогою циркуля і лінійки. Наприклад, за їхньою допомогою не можна розділити кут у 60° на три рівні частини, тобто не можна побудувати кут у 20° ; сам кут у 60° , як ми незабаром побачимо, побудувати легко. У тій же статті доводиться нерозв'язність іншої знаменитої задачі: подвоєння куба (побудова ребра куба, об'єм якого вдвічі більший, ніж у даного), а також з'ясується, які правильні багатокутники можна побудувати циркулем і лінійкою. Виявляється, що для цього число сторін має бути добутком степеня двійки і різних простих чисел вигляду $2^{2^k} + 1$ (такими є $3 = 2^1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $17 = 2^4 + 1$, $257 = 2^8 + 1$, $65537 = 2^{16} + 1$; інші прості числа такого вигляду поки не відомі).

9. Паралельність

Дві різні прямі називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Прямую вважають також паралельною самій собі.

Два основних факти про паралельні прямі:

(1) через точку, що не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну заданій, і до того ж тільки одну;

(2) дві прямі паралельні в тому і тільки в тому випадку, якщо третя пряма перетинає їх під рівними кутами.

Твердження (1) можна пояснити так. На рисунку через точку проходить пунктирна пряма, паралельна суцільній. Якщо суцільна пряма нерухома, а пунктирну повертають навколо позначеної точки, то є рівно одне положення, в якому прямі не перетинаються. Якщо хоч трохи повернути пряму вліво або вправо, то з'явиться точка перетину (яка буде тим далі, чим менше ми повернемо пряму).

У «неевклідовій» геометрії (геометрії Лобачевського) це неправильно (і відрізняє неевклідову геометрію від евклідової): є цілий діапазон кутів, в якому прямі не перетинаються.

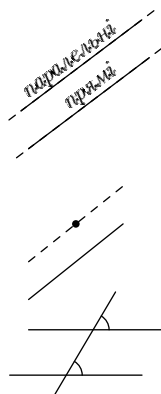
Твердження (2) використовує не дуже звичний зворот «у тому і тільки в тому випадку». Зміст його такий: по-перше, якщо третя пряма перетинає дві прямі під рівними кутами, то ці прямі паралельні (не перетинаються); по-друге, якщо дві прямі паралельні, то будь-яка третя пряма перетинає їх під рівними кутами. (Перша частина відповідає словам «у тому», а друга — «тільки в тому».)

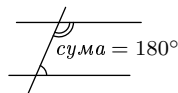
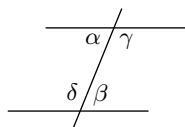
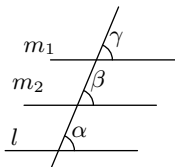
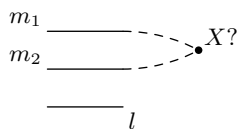
Традиційно в підручниках геометрії твердження (1) вважають аксіомою, а твердження (2) — її наслідком.

Іноді пряму не вважають паралельною самій собі (прямі, що збігаються, не вважаються паралельними); тоді в твердженні (2) потрібна відповідна обмовка.

124. Доведіть, що дві прямі, які паралельні третій, паралельні між собою.

▷ Цю задачу можна розв'язати двома способами — або за допомогою твердження (1), або за допомогою твердження (2). Наведемо обидва варіанти.





(Перший варіант) Нехай дві прямі m_1 і m_2 паралельні третій прямій l . Чи можуть вони перетнутися в якійсь точці X ? Ні, тому що в такому разі через X проходило б дві прямі, паралельні даній. Отже, якщо в них є спільна точка, то вони збігаються (а прямі, що збігаються, також вважаються паралельними).

(Другий варіант) Перетнемо всі три прямі якоюсь прямою n і позначимо кути, що утворились, як на рисунку. Оскільки прямі l і m_1 паралельні, то кути α і γ рівні. Оскільки прямі l і m_2 паралельні, то кути α і β рівні. Отже, всі три позначених кути рівні. А з рівності кутів β і γ впливає паралельність прямих m_1 і m_2 . $\triangleleft$

125. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні.

▷ Це — прямий наслідок властивості (2), оскільки кути, що утворюються при перетині двох прямих їхнім спільним перпендикуляром, прямі і тому рівні. $\triangleleft$

Пари кутів, що утворюються при перетині двох прямих третьою (яку традиційно називають *січною*), мають традиційні назви, які ми пояснимо рисунком. Кути α і β називають *внутрішніми перехресними* або *внутрішніми різносторонніми*; така ж назва відноситься до пари кутів γ і δ . Кути α і δ називають *внутрішніми односторонніми*; така ж назва відноситься до пари β і γ .

Згадуючи, що вертикальні кути рівні, а суміжні кути становлять у сумі 180° , можна сформулювати властивість (2) так: *прямі паралельні в тому і тільки тому випадку, коли внутрішні перехресні кути при січній рівні.*

Або так: *прямі паралельні в тому і тільки тому випадку, коли внутрішні односторонні кути становлять у сумі 180° .*

Іноді говорять навіть про «зовнішні перехресні» і «зовнішні односторонні» кути.

126. Доведіть, що через дану точку можна

провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної.

▷ Це — в точності повторення попередньої задачі: якщо провести дві такі прямі, то вони будуть двома перпендикулярами до заданої прямої. За попередньою задачею вони паралельні — і не можуть проходити через одну точку (якщо не збігаються)! ◁

Є два вирази, що відносяться до побудови перпендикулярів.

Якщо точка A не лежить на прямій l і ми проводимо через A пряму, перпендикулярну до l , це називається «опустити з A перпендикуляр на l ». (Навіть якщо на рисунку точка A нижче від прямої l , все одно кажуть «опустити».)

Якщо точка A лежить на прямій l і ми проводимо через A пряму перпендикулярно до l , це називається «поставити перпендикуляр до l у точці A ».

Задача 126, таким чином, говорить, що з даної точки можна опустити тільки один перпендикуляр на дану пряму. (Як це зробити циркулем і лінійкою, ми вже бачили в задачі 120.)

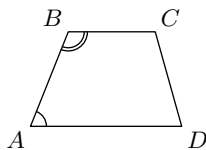
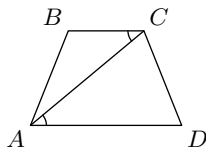
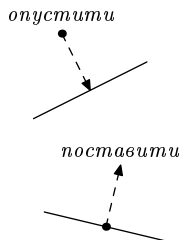
127. У чотирикутнику $ABCD$ кут ACB дорівнює куту CAD . Доведіть, що в нього є дві паралельні сторони.

▷ Ця задача — прямий наслідок властивості (2): за умовою внутрішні перехресні кути ACB і CAD при січній AC рівні, і тому прямі AD і BC паралельні. ◁

128. Два сусідніх кути чотирикутника становлять у сумі 180° . Доведіть, що дві його сторони паралельні. Доведіть, що два інших кути також становлять у сумі 180° .

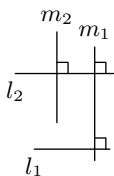
▷ Нехай у чотирикутнику $ABCD$ кути A і B становлять у сумі 180° . Вони є внутрішніми односторонніми кутами при січній AB , і тому прямі AD і BC паралельні.

Тепер розглянемо сторону CD як січну, при якій лежать два внутрішніх односторонніх кути C і D . Оскільки прямі паралельні, за властивістю



(2) сума цих кутів дорівнює 180° . $\triangleleft$

129. Доведіть, що перпендикуляри до паралельних прямих паралельні.



$\triangleright$ Нехай l_1 і l_2 — паралельні прямі, m_1 — перпендикуляр до l_1 , а m_2 — до l_2 . Переконаємося, що прямі m_1 і m_2 перетинаються під прямим кутом: пряма m_1 перетинає дві паралельні прямі l_1 і l_2 під рівними кутами (за властивістю (2)).

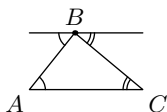
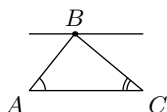
Тепер видно, що m_1 і m_2 — два перпендикуляри до l_2 і тому паралельні (задача 125). $\triangleleft$

130. Сторони одного кута паралельні сторонам іншого (і йдуть у тих же напрямках, див. рисунок). Доведіть, що кути рівні.



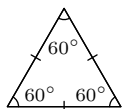
$\triangleright$ Обидва ці кути рівні третьому, який утворюється при перетині однієї сторони одного кута з непаралельною до неї стороною іншого кута (двічі використовуємо властивість (2)). $\triangleleft$

131. Через вершину B трикутника ABC проведено пряму, паралельну стороні AC . Позначте на рисунку кути, рівні кутам A і C трикутника. Виведіть звідси, що сума кутів трикутника дорівнює 180° .



$\triangleright$ Позначені на рисунку кути рівні кутам A і C як внутрішні перехресні й доповнюють кут B з двох боків до розгорнутого. $\triangleleft$

132. У трикутнику всі сторони рівні. Знайдіть його кути.



$\triangleright$ Рівносторонній трикутник (в якому всі сторони рівні) є окремим випадком рівнобедреного, причому за основу можна взяти будь-яку сторону. Тому в ньому всі кути рівні. Оскільки в сумі кути становлять 180° (попередня задача), то кожен з них дорівнює 60° . $\triangleleft$

133. У рівнобедреному трикутнику один з кутів дорівнює 80° . Які його інші кути? (Вкажіть усі можливості.)

$\triangleright$ У рівнобедреному трикутнику два кути при основі рівні. Якщо один з них дорівнює 80° , то в

сумі вони дорівнюють 160° , і на третій кут (при вершині) залишається 20° . Якщо ж кут при вершині дорівнює 80° , то на два кути при основі залишається 100° , і кожен з них дорівнює 50° . $\triangleleft$

134. У рівнобедреному трикутнику один з кутів дорівнює 60° . Доведіть, що трикутник рівносторонній.

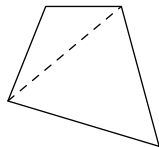
▷ Неважливо, який саме кут дорівнює 60° (кут при основі або при вершині), все одно інші кути теж рівні 60° . Але ми знаємо, що якщо в трикутнику два кути рівні, то протилежні їм сторони рівні. Отже, якщо всі три кути рівні, то й усі три сторони рівні. $\triangleleft$

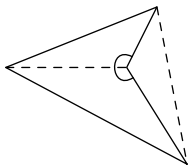
135. Яких значень може набувати найбільший кут трикутника? Яких значень може набувати найменший кут трикутника? Яких значень може набувати третій (середній за величиною) кут трикутника?

▷ Якщо три числа в сумі дорівнюють 180 , то найбільше з них не менше за 60 (інакше всі інші менші за 60 і сума менша за 180). Таким чином, більший кут трикутника може бути від 60° до 180° . З аналогічних міркувань менший кут може бути від 0° до 60° . Середній кут більший за 0° і менший за 90° , оскільки в сумі з більшим кутом він менший за 180° . Усі ці варіанти дійсно можливі (що можна перевірити для випадку рівнобедрених трикутників). $\triangleleft$

136. Доведіть, що сума кутів чотирикутника дорівнює 360° , розрізавши його на два трикутники.

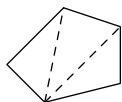
▷ Провівши діагональ, ми розрізаємо чотирикутник на два трикутники. При цьому два кути чотирикутника розбиваються на дві частини (кожен). Якщо ми додамо всі шість кутів у двох трикутниках, то отримаємо $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. З іншого боку, ця сума є сумою кутів чотирикутника (якщо згрупувати пари кутів зі спільними вершинами). $\triangleleft$





Цей розв'язок, строго кажучи, потребує деяких уточнень. Справа в тому, що діагональ чотирикутника може опинитися поза чотирикутником. (Багатокутники, в яких таке трапляється, називають *неопуклими*.) Але все одно сума кутів, якщо дозволяти кути більші за 180° , дорівнюватиме 360° . Справді, можна розрізати чотирикутник по іншій діагоналі й застосувати те ж саме міркування, що і раніше.

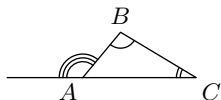
137. Чому дорівнює сума кутів опуклого п'ятикутника?



▷ Як і в попередній задачі, розріжемо його на трикутники, провівши дві діагоналі. Вийде 3 трикутники. Отже, сума кутів опуклого п'ятикутника дорівнює $3 \times 180^\circ = 540^\circ$. ◁

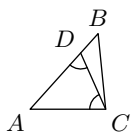
138. Знайдіть суму кутів опуклого n -кутника.

▷ Візьмемо одну з вершин і проведемо з неї всі діагоналі. Їх буде $n - 3$ (з n вершин випадають три — сама вершина і дві сусідні). Вони розрізають багатокутник на $n - 2$ трикутники (кожен розріз збільшує число частин на 1, спочатку була одна частина). У кожному трикутнику сума кутів дорівнює 180° . Додаючи всі кути всіх трикутників, отримуємо суму всіх кутів багатокутника, яка тим самим дорівнює $180(n - 2)^\circ$. ◁



139. Доведіть, що зовнішній кут при вершині A трикутника ABC (див. рисунок) дорівнює сумі кутів B і C .

▷ Сума трьох кутів трикутника дорівнює 180° . Отже, сума двох з них дорівнює різниці 180° і третього кута, тобто дорівнює куту, суміжному з третім. Що й треба було довести. ◁



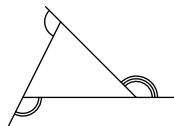
140. Сторона AB трикутника ABC довша за сторону AC , і на ній відкладений відрізок AD , рівний відрізку AC . Доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника ACD настільки ж більший за кут ABC , наскільки менший за кут ACB .

▷ Кути при основі CD рівнобедреного трикут-

ника ACD рівні. Один з них менший за кут ACB на величину кута DCB . Другий є зовнішнім кутом трикутника DCB , і тому дорівнює сумі кута DCB і кута ABC . Отже, в обох випадках різниця дорівнює величині кута DCB . $\triangleleft$

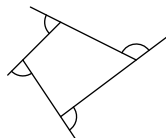
141. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів при трьох вершинах трикутника?

▷ Разом з трьома внутрішніми кутами (які в сумі дають 180°) виходить три розгорнутих кути, тобто 540° , тому сума зовнішніх кутів дорівнює $540 - 180 = 360^\circ$. $\triangleleft$



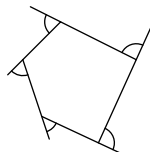
142. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів при чотирьох вершинах опуклого чотирикутника?

▷ Щоб знайти суму цих кутів (вони показані на рисунку одинарними дугами, але це не означає, що вони рівні!), розглянемо відповідні внутрішні кути. Разом з 4 внутрішніми кутами (які в сумі дають 360°) виходить 4 розгорнутих кути, тобто 720° , тому сума зовнішніх кутів дорівнює $720 - 360 = 360^\circ$. $\triangleleft$



143. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів при п'яти вершинах опуклого п'ятикутника?

▷ Разом з 5 внутрішніми кутами (які в сумі дають 540°) виходить 5 розгорнутих кутів, тобто 900° , тому сума зовнішніх кутів дорівнює $900 - 540 = 360^\circ$. $\triangleleft$

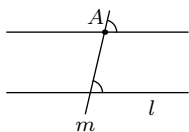


Аналогічним способом можна переконаватися, що сума зовнішніх кутів опуклого шести-, семи- і взагалі будь-якого n -кутника дорівнює 360° . Справді, разом із внутрішніми кутами виходить n розгорнутих кутів, тобто $n \cdot 180^\circ$, а внутрішні кути дають $(n - 2) \cdot 180^\circ$, тож на долю зовнішніх припадає різниця в $2 \cdot 180 = 360^\circ$.

Втім, є інше, більш наочне (хоча і менш формальне) пояснення. Уявімо собі автомобіль, який об'їжджає багатокутник по периметру. Кути багатокутника є точками повороту автомобіля. В кожній точці він повертає на кут, рівний зовнішньому куту багатокутника. Об'їхавши коло, автомобіль

зробить повний оберт, тобто поверне на 360° .

144. Дано пряму і точку, що на ній не лежить. Як провести (циркулем і лінійкою) через дану точку пряму, паралельну даній прямій?



▷ Ось один із способів. Нехай дано пряму l і точку A . Проведемо через точку A якусь пряму m , що перетинає пряму l . Шукана пряма перетинає пряму m під тим же кутом, що і пряма l , отже треба просто відкласти цей кут від прямої m (задача 116).

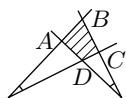
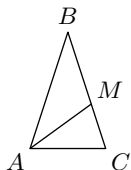
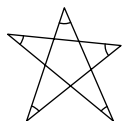
Можна вибрати кут перетину прямим: опустимо з A перпендикуляр m на пряму l , а потім з тієї ж точки A поставимо перпендикуляр до прямої m (використовуючи задачі 120 і 119).

Ще кілька задач

145. Дайте інше доведення теореми про суму кутів опуклого чотирикутника, розрізавши його двома діагоналями на чотири трикутники.

146. Доведіть, що в опуклому чотирикутнику $ABCD$ (вершини перераховані за годинниковою стрілкою)

$$\angle CAD + \angle BDA = \angle DBC + \angle ACB.$$



147. Доведіть, що сума п'яти кутів у вершин п'ятикутної зірки (позначені одинарною дугою, але можуть бути різними) однакова у всіх зірок. Чому вона дорівнює?

148. Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC . Відрізок AM ділить його на два рівнобедрених трикутників з основами AB і MC . Знайдіть кут B . [Відповідь: 36° .]

149. Продовження двох протилежних сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$ перетинаються під кутом 20° , продовження двох інших протилежних сторін (AD , BC) — теж. Доведіть, що два кути в чотирикутнику рівні, а два інші відрізняються на 40° .

150. Сторони кута в 75° перпендикулярні до

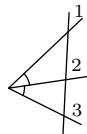
сторін іншого кута. Чому може дорівнювати цей кут? (Можливі різні варіанти.)

151. Дві прямі рухаються паралельно самим собі. Доведіть, що кут між ними залишається незмінним.

152. Згадуючи доведення формули для суми кутів n -кутника, отримайте як наслідок, що при будь-якому способі розрізання діагоналями опуклого n -кутника на трикутники (діагоналі не зобов'язані виходити з однієї вершини) отримаємо одне й те саме число трикутників ($n - 2$).

153. Яке найбільше число гострих кутів може бути в опуклому 4-кутнику? в опуклому 5-кутнику? в опуклому 100-кутнику?

154. Пряма перетинає сторони кута і його бісектрису, утворюючи три кути (див. рисунок). Доведіть, що середній з цих кутів дорівнює півсумі крайніх.

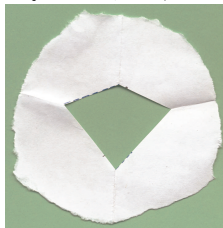
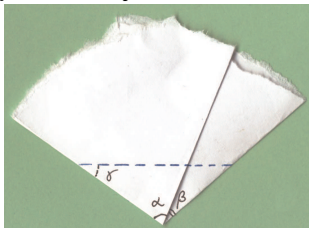


155. Через дану точку проведіть (циркулем і лінійкою) пряму, яка перетинає дві дані (не паралельні) прямі під рівними кутами.

156. Робот проїжджає по прямій 1 метр, повертає праворуч на деякий кут α , проїжджає прямо ще 1 метр, знов повертає праворуч на той же кут α , знов проїжджає 1 метр і так далі. Доведіть, що точки поворотів робота лежать на одному колі.

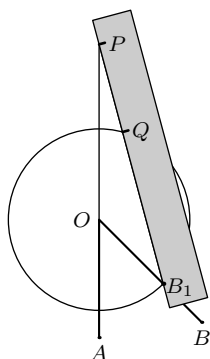


157. Шматок паперу двічі зігнули по прямим, а потім розрізали ножицями по пунктирній лінії і розгорнули. Як знайти кути отриманого чотирикутника (дірки), якщо відомі кути α , β і γ ?



158. По прямому шосе зі швидкістю 60 км/год їде машина. Паралельно шосе стоїть будинок довжиною 100 метрів. Кожну секунду пасажир машини вимірює кут, під яким видно будинок (фасад будинку). Доведіть, що сума всіх вимірених ним кутів не більша за 1100° .

У задачі 118 ми ділили кут на дві рівні частини (будували бісектрису кута) циркулем і лінійкою. А чи можна циркулем і лінійкою розділити кут на *три* рівні частини? Ця задача називається «трисекцією кута». Вона відома з часів стародавньої Греції, і Архімед придумав розв'язок з невеличким шахрайством — або, як зараз кажуть, креативно використав лінійку, зробивши на ній позначки. Ось ця побудова.



Бажаючи розділити на три частини кут AOB , проведемо коло деякого радіуса з центром в O . Потім, не змінюючи розхилу циркуля, зробимо на лінійці дві позначки P і Q (відстань між ними дорівнює радіусу кола). Тепер прикладемо лінійку так, щоб вона проходила через точку кола на промені OB , а дві позначки потрапили б на пряму AO і на коло. Тоді кут, утворений лінійкою з прямою AO , буде дорівнює третині початкового.

159. Доведіть, що побудова Архімеда дійсно дозволяє побудувати кут, що дорівнює третині даного. (Трикутники PQO і OQB_1 — рівнобедрені.)

Як було доведено набагато пізніше, без таких хитрощів (використовуючи лінійку лише для того, щоб провести пряму через вже існуючі точки, а циркуль — лише для побудови кола з уже побудованим центром і відомим радіусом) обійтися не можна.

10. Прямокутні трикутники

Прямокутним називається трикутник, в якому один з кутів прямий. Прилегли до цього кута сторони називаються *катетами* трикутника, а протилежна сторона — *гіпотенузою*.

160. Доведіть, що в прямокутному трикутнику кути при гіпотенузі в сумі становлять прямий кут.

▷ Сума всіх трьох кутів дорівнює 180° , отже, на долю двох інших залишається $180 - 90 = 90^\circ$. ◁

Звідси випливає, що інші кути в прямокутному трикутнику (крім прямого) — гострі: якщо їхня сума дорівнює прямому куту, то кожен з доданків менший, ніж прямий.

161. Знайдіть кути прямокутного рівнобедреного трикутника.

▷ Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, а в сумі становлять 90° , тож кожен з них дорівнює 45° . ◁

Кілька наступних задач дають ознаки рівності прямокутних трикутників.

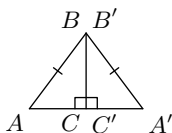
162. (а) Доведіть ознаку рівності прямокутних трикутників «за двома катетами»: якщо у двох прямокутних трикутників (ABC і $A'B'C'$ з прямими кутами B і B') рівні відповідні катети ($AB = A'B'$ і $BC = B'C'$), то трикутники рівні.

(б) Сформулюйте і доведіть ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим до нього гострим кутом.

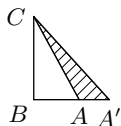
▷ Ці ознаки не потребують спеціального доведення: вони є лише окремими випадками першої і другої ознак рівності трикутників, коли один з кутів прямий. ◁

У наступній задачі вже не можна послатися на ознаки рівності трикутників (тому що та ознака, на яку хотілося б послатися, є неправильною — див. задачу 85).

163. Катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника рівні катету і гіпотенузі іншого. Доведіть, що трикутники рівні.



▷ Прикладемо трикутники один до одного рівними катетами BC і $B'C'$ (див. рисунок). Оскільки трикутники прямокутні, то два інших катети утворять одну пряму (AA') і два трикутники утворять більший трикутник. За умовою гіпотенузи рівні, тому цей більший трикутник вийде рівнобедреним. Доведемо, що точка C (яка суміщена з C') є серединою AA' . Справді, якби серединою AA' була якась інша точка M , то BM була б медіаною рівнобедреного трикутника ABA' , а тому і його висотою, і ми отримали б два різних перпендикуляри, опущені з точки B на пряму AA' , — відрізки BC і BM . Отже, C і M збігаються, відрізки AC і $A'C'$ рівні і наші трикутники рівні, наприклад, за двома катетами. (Або за трьома сторонами.) ◁



Можна міркувати інакше, сумістивши рівні катети так, щоб трикутники опинилися по один бік (див. рисунок). Якщо при цьому точки A і A' сумістяться, то трикутники рівні. Якщо ж ні, то утвориться трикутник CAA' . Від повинен бути рівнобедреним, оскільки $CA = CA'$ за умовою (гіпотенузи рівні). З іншого боку, в ньому один з кутів при основі (на рисунку $\angle CAA'$) тупий, оскільки суміжний з ним кут ($\angle CAB$) гострий. Кути при основі в рівнобедреному трикутнику рівні, а другого тупого кута бути не може (сума кутів 180°). Отже, цей випадок (коли A і A' не сумістилися) неможливий.

164. Гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнює гіпотенузі іншого; один з прилеглих до неї кутів дорівнює куту при гіпотенузі іншого трикутника. Доведіть, що трикутники рівні.

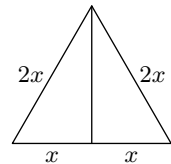
▷ Оскільки в обох трикутниках сума кутів дорівнює 180° і у них є два рівних кути, то рівні й треті кути, і трикутники рівні за гіпотенузою і двом прилеглим до неї кутам. ◁

165. Катет одного прямокутного трикутника дорівнює катету іншого; протилежні до них кути також рівні. Доведіть, що трикутники рівні.

▷ У кожному з двох трикутників гострі кути в сумі дають 90° , тому якщо протилежні до рівних катетів кути рівні, то й прилеглі до них кути теж рівні. Залишається скористатися другою ознакою рівності трикутників. ◁

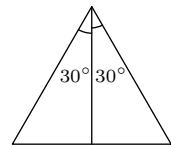
166. У прямокутному трикутнику один з катетів вдвічі коротший за гіпотенузу. Знайдіть кути трикутника.

▷ Візьмемо два таких трикутники і прикладемо їх довгими катетами один до одного. Короткі катети будуть утворювати один відрізок (кути прямі). Довжина цього відрізка за умовою дорівнює довжині гіпотенузи, тож вийде рівносторонній трикутник, в якому кути дорівнюють 60° . Відповідь: 60° , 30° , 90° . ◁



167. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 30° . Доведіть, що один із катетів вдвічі коротший за гіпотенузу.

▷ Прикладемо два таких трикутники один до одного катетами так, щоб два кути в 30° утворили кут у 60° . Вийде рівнобедрений трикутник з кутом при вершині 60° , який буде рівностороннім. Отже, подвоєний менший катет дорівнює гіпотенузі, що й треба було довести. ◁



168. Як побудувати прямокутний трикутник, якщо дані його катет і гіпотенуза?

▷ Побудуємо прямий кут. На одній з його сторін відкладемо даний катет. Потім візьмемо циркуль із розхилом, що дорівнює гіпотенузі, поставимо одну ніжку циркуля в кінець катета і зробимо потрібну позначку на іншій стороні кута. ◁

Ще кілька задач

169. Доведіть, що в тупокутному трикутнику тільки один кут тупий, а два інших — гострі.

170. Медіана трикутника вдвічі коротша за сторону, до якої вона проведена ($AM = \frac{1}{2}BC$ для медіани AM трикутника ABC). Покажіть, що цей трикутник прямокутний: $\angle A = 90^\circ$.

171. Покажіть, що будь-який прямокутний трикутник можна розрізати на два прямокутних трикутники, в яких такі ж самі кути, що й у початкового.

172. Василь стверджує, що розрізав тупокутний трикутник на кілька гострокутних. Чи може так бути?